JURNAL ILMIAH SIMANTEK Vol. 2 No. 3
ISSN. 2550-0414 Juli 2018

ENSEMBLE KALMAN FILTER (ENKF) UNTUK PERAMALAN YANG LEBIH AKURAT

Hery Andi Sitompul
Dosen Kopertis Wilayah I Sumatera Utara, Dpk Universitas Darma Agung, Medan

Abstrak

Peramalan (*forecasting*) sangatlah penting dalam ilmu statistika, biasanya peramalan akan digunakan untuk mengambil suatu keputusan kedepan dengan menggunakan analisis data yang sudah berlalu,oleh karena itu keakuratan dari suatu metode peramalan perlu menjadi pertimbangan utama. Terdapat berbagai metode peramalan dalam ilmu statistika, tetapi dengan menerapkan metode Ensemble Kalman Filter terhadap metode peramalan yang sudah ada diperoleh hasil yang lebih akurat. Dalam tulisan ini akan diperlihatkan bahwa EnKF dapat memperbaikai hasil peramalan tersebut.

Kata Kunci : **Autoregressive, EnKF, Peramalan**

Latar Belakang

Ensemble Kalman Filter telah menjadi sebuah metode yang sangat popular, sudah banyak diuji dan diaplikasikan dalam berbagai studi dalam dua dekade terakhir ini sejak diperkenalkan oleh Geir Evensen pada tahun 1994. Hal dikarenakan metode ini cukup sederhana secara konseptual dan tidak terlalu sulit untuk diaplikasikan.

Pada dasarnya metode ini menggunakan simulasi Monte Carlo pada konsep Kalman Filter. Kalman Fiter itu sendiri dikenal sebagai sebuah metode estimasi kuadratik linier, yang merupakan sebuah algoritma yang menggunakan rangkaian observasi pengukuran pada saat tertentu dan mengassimilasikan data tersebut pada model estimasi.

Kesuksesan metode Ensemble Kalman Filter (EnKF) pada berbagai model estimasi yang dilakukan dalam berbagai studi sebelumnya menjadi latar belakang untuk menerapkan metode ini pada model peramalan yang sudah ada, oleh karena itu dalam tulisan ini akan dibahas bagaimana merepakan metode ini dalam peramalan dan melihat hasil yang ditimbulkan.

Maksud dan Tujuan

Maksud dari tulisan ini adalah untuk melakukan pembahasan bagaimana menerapkan algoritma Ensemble Kalman Filter (EnKF) pada model peramalan. Sedangkan tujuan dari tulisan ini adalah :

1. Mendapat sebuah metode peramalan yang memberikan hasil yang lebih akurat.
2. Menunjukkan bahwa metode EnKF dapat diterapkam pada model peramalan yang sudah ada.

Landasan Teori

Ensemble Kalman Filter

Kalman Filter merupakan metode pendekatan estimasi fungsi parameter dalam peramalan deret waktu (*time series*), berupa algoritma yang menggabungkan model dan pengukuran (observasi). Algoritma ini mengestimasi keadaan dari suatu proses dengan cara meminimumkan rataan dari galat (*Mean square Error*) secara rekursif dan efisien, sehingga sering disebut penduga rekursif. Data pegukuran terbaru

menjadi
bagian penting dari algoritma ini, karena data terbaru ini akan mengoreksi hasil prediksi, sehingga hasil estimasi selalu mendekati kondisi sebenarnya. Sedangkan Ensemble Kalman Filter adalah kelanjutan dari Kalman Filter untuk masalah nonlinier, yaitu merupakan pendekatan metode Monte Carlo pada algoritma Kalman Filter.

Kalman Filter

Misalkan $x_n \in \mathbb{R}$ adalah suatu proses stokastik dan asumsikan bahwa x_n memenuhi persamaan linier berikut :

$x_n = Ax_{n-1} + Bu_{n-1} + w_{n-1}, n \geq 1$ ....(1)

$z_n = Hx_n + v_n$.............................(2)

Dimana :
A adalah matriks model linier
B adalah matriks kontrol masukan
u_n adalah variabel control
w_n adalah gangguan pada system
x_n adalah variabela *state*
z_n adalah pengukuran atau observasi
v_n adalah gangguan pada pengukuran
n adalah indeks integer waktu
Dengan keadaan awal x_0 diberikan berdistribusi normal :

$x_0 \sim N(0, P_0^*)$ ....(3)

Dimana P_0^* adalah matriks kovariansi untuk proses stokastik x_0 dan $w_n \sim N(0, Q_n), v_n \sim N(0, R_n)$ dimana Q_n adalah matriks kovariansi gangguan pada sistem, R_n adalah matriks kovariansi untuk gangguan pada pengukuran.

Misalkan x_n didefenisikan sebagai keadaan (*state*) pada waktu t_n dan x_{n+1} menyatakan keadaan pada saat t_{n+1}, dan misalkan $\hat{x}_{n+1}^-$ menyatakan estimasi prior dari proses *state* berdasarkan informasi yang diperoleh hingga waktu t_{n+1} , dan misalkan $\hat{x}_n$ menyatakan estimasi terbaik dari proses *state* (posterior) sistem yang telah difilter hingga waktu t_n, maka dapat dirumuskan bahwa :

$\hat{x}_{n+1}^- = E(x_{n+1}|z^*)$

$\hat{x}_n = E(x_n|z^*)$

Dimana z^* adalah hasil pengukuran hingga waktu t_n. Dengan demikian model posterior untuk satu tahap waktu kedepan dapat dicari dengan :

$\hat{x}_{n+1}^- = A\hat{x}_n + Bu_n$ ....(4)

Dan matriks kovariansi dapat dihitung dengan persamaan berikut :

$P_{n+1}^- = AP_nA' + Q$

Dimana
$P_{n+1}^{-} = E[(\hat{x}_{n+1}^{-} - \hat{x}_n)(\hat{x}_{n+1}^{-} - \hat{x}_n)'|z^*]$
$P_n = E[(\hat{x}_n - x_n)(\hat{x}_n - x_n)'|z^*$

tahap pemfilteran adalah tahap dimana estimasi posterior dihitung, yang dapat ditentukan melalui persamaan berikut :
$\hat{x}_n = \hat{x}_n^{-} + K_n(z_n - H\hat{x}_n^{-})$

Dengan K_n adalah kalman Gain yang dapat dihitung dengan :
$K_n = P_n^{-}H'[HP_n^{-}H' + R_n]^{-1}$ ....(5)

dan matriks kovariansi posterior dapat diperbaharui melalui persamaan berikut :
$P_n^{*} = (I - K_nH)P_n^{-}$

Ensemble Kalman Filter

Ensemble Kalman Filter (EnKF) dikembangkan dan diperkenalkan oleh Geir Evensen tahun 1994, untuk mengatasi masalah nonlinier pada model oceanografi dan menunjukkan bahwa EnKF adalah suatu metode yang menjanjikan.

Misalkan $x_n \in \mathbb{R}$ adalah suatu proses stokastik, dan diasumsikan bahwa x_n memenuhi persamaan nonlinier berikut :
$x_n = f(x_{n-1}) + w_n$ ....(6)
$z_n = Hx_n + v_n$ ....(7)

Gagasan dari ensemble adalah simulasi Monte Carlo pada model *state* (x_n), dimana satu kumpulan ensemble dibangkitkan untuk model *state* (x_n) kemudian setiap anggota ensemble dievaluasi melalui persamaan (6) untuk mendapatkan sekelompok ensemble baru yang disebut dengan prior yang selanjutnya dilakukan estimasi dengan proses Kalman Filter biasa. Hal yang sama juga dilakukan terhadap model observasi (7) dengan membangkitkan sekelompok melalui observasi sebenarnya, dengan ensemble ini proses updating/filter dilakukan dengan Kalman Filter.

Berikut ini adalah tahapan dalam proses Ensemble Kalman Filter (EnKF) :

- $X := [x_1, x_2, \ldots, x_n]' \in \mathbb{R}^{N \times N_e}$ adalah matriks ensemble untuk *state*.
- $\overline{X} \coloneqq [\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n]' \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ adalah vektor rata – rata ensemble.
- $z \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ adalah vektor observasi
- $P_e := \frac{(X-\overline{X})(X-\overline{X})'}{N_e - 1}$ adalah matriks kovariansi ensemble.
- $Z \coloneqq z + \gamma \in \mathbb{R}^{m \times N_e}$ adalah matriks observasi dengan gangguan.
- $\gamma : (\in_1, \in_2, \ldots, \in_n)$ adalah vektor gangguan dimana setiap $\in_i \sim N(0, \sum_i^e)$
- $Re := \frac{\gamma\gamma'}{N_{e-1}}$ adalah matriks observasi dengan gangguan.

Peramalan

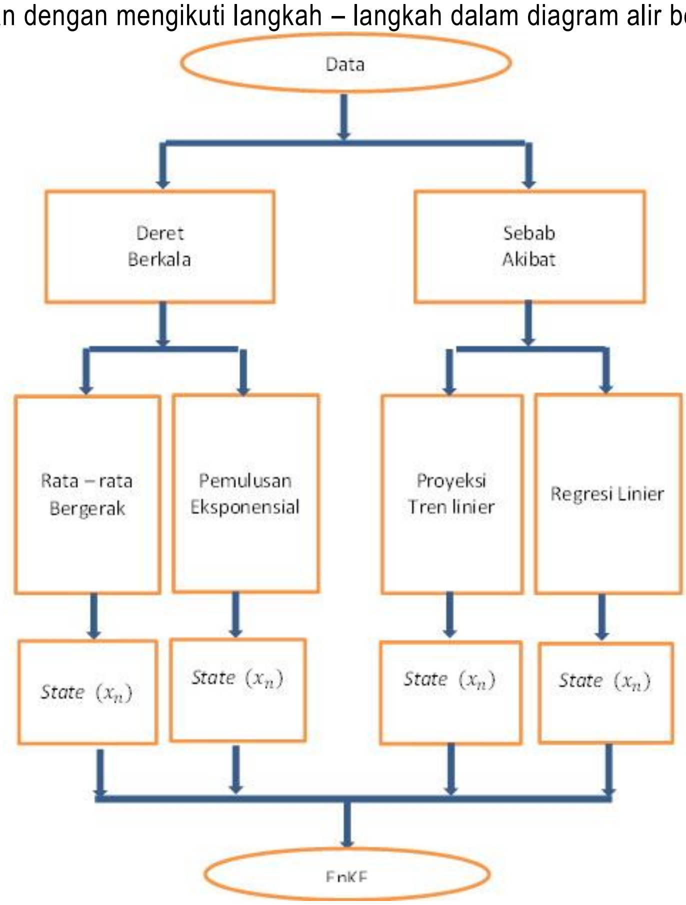
Peramalan adalah seni dan ilmu yang memprediksi peristiwa – peristiwa yang akan terjadi dengan menggunakan data historis dan memproyeksikannya ke masa depan dengan beberapa bentuk model matematis.

Secara umum dalam statsitika peramalan dapat dikelompokkan menjadi :

a. Model peramalan yang menggunakan sekumpulan data masa lalu untuk peramalan (*time series*) yang mana metode ini dikelommpokkan kembali menjadi metode rata – rata bergerak (*moving average*) Pemulusan eksponensial (*exponential smoothing*).
b. Model Peramalan yang menggunakan hubungan sebab akibat yang dikelompokkan kembali menjadi : metode proyeksi tren linier dan metode regresi linier.

Metodologi Penelitian

Untuk mengimplementasikan teknik Ensemble Kalman Filter (EnKF) pada metode peramalan dilakukan dengan mengikuti langkah – langkah dalam diagram alir berikut :



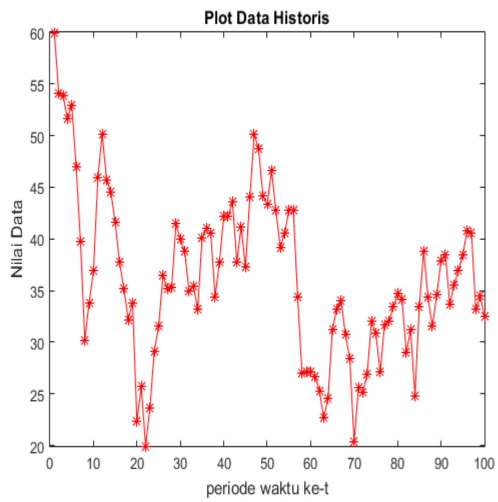
Selanjutnya pada tahap estimasi dengan EnKF dilakukan dengan mengikuti algoritma berikut :

Pada saat $n = 0$

- Masukkan ensemble variabel awal : $x_0 = X \sim N(\mu_0, \sum_0)$
- Langkah prediksi : bangkitkan gangguan pada model $w_n \sim N(0, \sum_n^w)$, prediksi satu tahap kedepan $\hat{x}_n^- = f(\hat{x}_{n-1}^-) + w_n$
- Tahap *filter/updating* : bangkitkan gangguan pada observasi $\in_n \sim N(0, \sum_n^\in)$, $z_n = H\hat{x}_n^- + \in_n$
- Tentukan Kalman Gain : $K_n = PeH[HPeH' + Re]^{-1}$
- Perbaharui *state* dengan pengukuran (assimilasi data) : $\hat{x}_n = \hat{x}_n^- + K_n(z_n - H\hat{x}_n^-)$.

Sebagai langkah konkrit dari penerapan metode Ensemble Kalman Filter pada peramalan, akan diperlihatkan dalam contoh berikut ini.

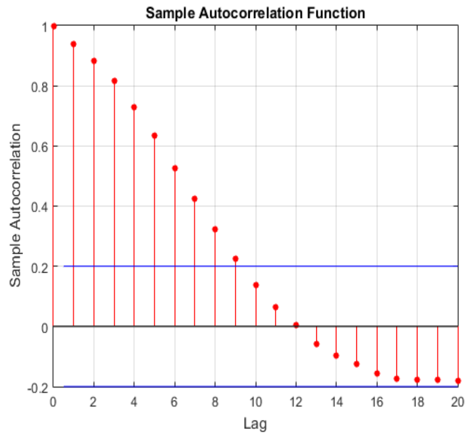
Data berikut ini adalah data yang disajikan dalam bentuk grafik (data yang sudah diplot)

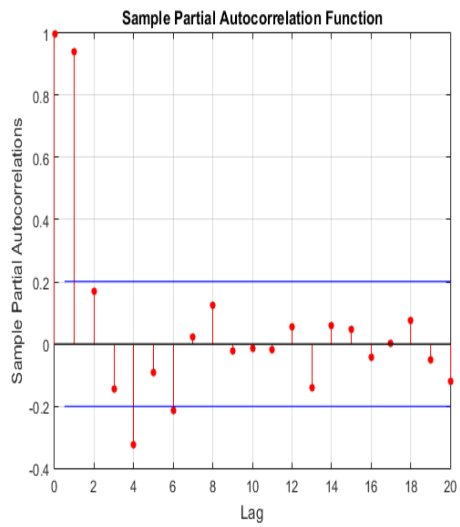


Hasil dan Pembahasan

Dari hasil plot data tersebut diatas dapat disimpulkan datanya adalah data runtun waktu (*time series data*), dengan demikian metode yang digunakan untuk peramalan data tersebut adalah peramalan dengan deret berkala. Selanjutnya dilakukan identifikasi model untuk data tersebut yang meliputi :

- Plotting input dan output data *time series*. Sudah dilakukan dalam grafik diatas.
- Grafik fungsi autokorelasi (ACF) dan grafik fungsi parsial autokorelasi (PACF) sebagai berikut :





- Identifikasi model data : dilihat dari plotting data diatas dan ditunjang dengan nilai ACF dan PACF terlihat bahwa data sudah stasioner dan menunjukkan model time series adalah model Auto Regressive - AR(1) yang mempunyai bentuk umum: $x_t = \emptyset x_{t-1} + w_t$, dimana $\emptyset$ adalah konstanta AR(1) dan w_t white noise.
- Taksiran konstanta model AR(1).
  Dengan pendekatan metode Yule Walker diperoleh : $\emptyset = 0.8050$

Dengan demikian model peramalan AR(1) adalah :
$x_t = 0.8050x_{t-1} + w_t$

Perbaikan Hasil Ramalan dengan EnKF

Model *state* untuk EnKF adalah :

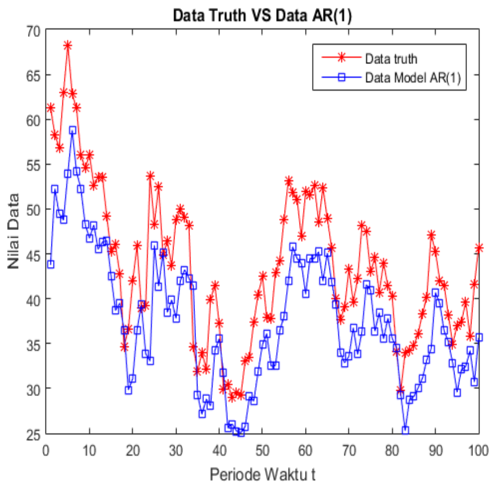
$x_t = \emptyset x_{t-1} + w_t$

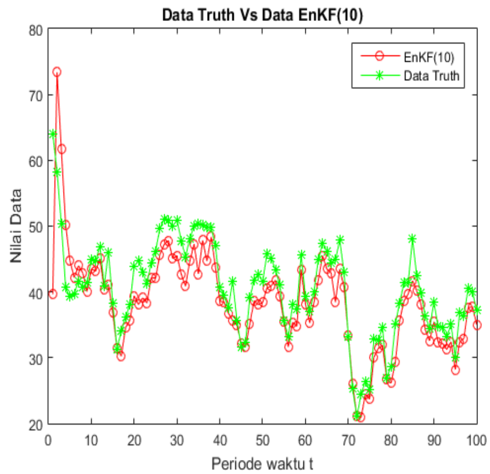
$x_t = 0.8050x_{t-1} + w_t$

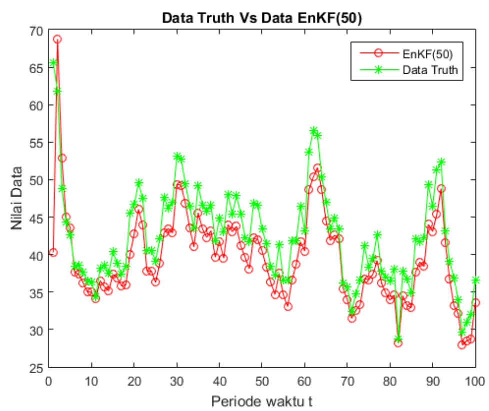
Ensemble variabel awal :
$x_0 \sim N(39.7,55.2,1,n)$ dengan ukuran ensemble $1 \times n$
Tahap prediksi :
$w_n \sim N(6,4,1,n)$
$\hat{x}_t^- = f(\hat{x}_{t-1}^-) + w_t$
$= 0.8050x_{t-1} + w_t$

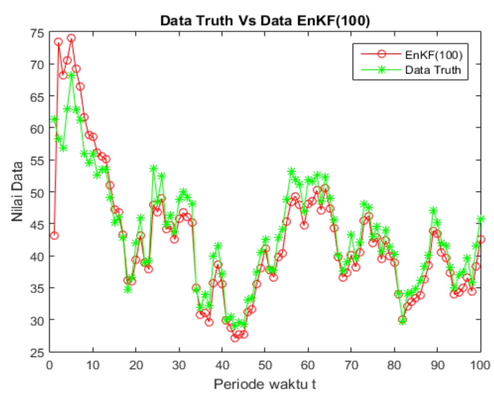
Tahap Filter :
$z_t = H\hat{x}_t^- + \in_t$ dengan $\in_t \sim N(0,0.3,1,n)$
Hitung Kalman Gain :
$K_t = PeH[HPeH' + Re]^{-1}$
Tahap pembaruan/*updating* :
$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t(z_t - H\hat{x}_t^-)$
Proses ini diulang terus menerus hingga $(z_t - H\hat{x}_t^-) \to 0$

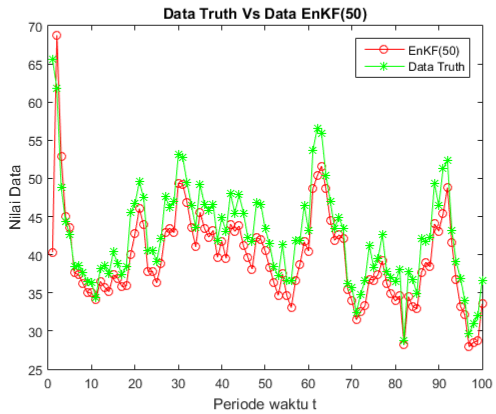
Seluruh proses simulasi perhitungan tersebut diatas dilakukan dalam pemograman matlab R2015a dengan mencoba beberapa ukuran ensemble, yang hasilnya adalah sebagai berikut :




Data Truth Vs Data EnKF(10)
EnKF(10)
Data Truth
Nilai Data
Periode waktu t


Data Truth Vs Data EnKF(50)
EnKF(50)
Data Truth
Nilai Data
Periode waktu t


Data Truth Vs Data EnKF(100)
EnKF(100)
Data Truth
Nilai Data
Periode waktu t



Berikut ini adalah tabel persentase rata – rata kesalahan absolut yang dihasilkan oleh peramalan dengan model autoregressive orde-1 atau AR(1) dengan penerapan metode EnKF pada peramalan dengan model AR(1).

Metode	MAPE
AR(1)	14.5182%
EnKF(10)	8.0031%
EnKF(50)	7.4752%
EnKF(100)	5.9591%
EnKF(200)	4.6235%

Dari hasil menganalisa grafik dan tabel persentase nilai *mean absolute percentage error* (MAPE) yang dihasilkan oleh kedua metode terlihat bahwa terdapat perbaikan hasil peramalan yang dihasilkan dengan menerapkan metode Ensemble Kalman Filter terhadap suatu metode peramalan.

Metode EnKF memberikan hasil yang lebih baik jika jumlah ensemble semakin besar, dapat dilihat dalam tabel jika jumlah ensemble 10 MAPE adalah 8.0031%, jika jumlah ensemble 200 MAPE adalah 4.6235%. Dapat disimpulkan bahwa Ensemble Kalman Filter memberikan perbaikan nilai ramalan atau hasil yang lebih akurat.

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Setelah melakukan hasil dan pembahasan dalam tulisan ini, dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu :

1. Metode EnKF memberikan hasil peramalan yang lebih akurat jika diterapkan pada metode peramalan autoregressive orde-1
2. Metode EnKF dapat diterapkan pada metode peramalan yang sudah ada dengan mudah.

Saran

Karena faktor acak dalam metode EnKF ini sangat tinggi maka disarankan pada saat menjalankan program untuk dilakukan berulang – ulang sampai dicapai hasil yang terbaik.

Daftar Pustaka

Adi Asri dan Taryo (2005), *Model Time Series Autoregressive untuk Menentukan Nilai Tukar Uang Rupiah Terhadap Dollar Amerika*.

Geir Evensen (2003), *The Ensemble Kalman Filter : Theorical Formulation and Practical Implementation*. Ocean Dynamics Vol.53

Hery Andi Sitompul (2011), *Estimasi Parameter Reservoir Komposit dengan Teknik Ensemble Kalman Filter dan Algoritma Genetika*, ITB Thesis.

Jan Mandel (2006), *Efficient Implementation of The Ensemble Kalman Filte*r. University of Colorado at Denver and Health Science Center.

John Petter Jensen (2007), *Ensemble Kalman Filtering for State and Parameter Estimation on a Reservoir Model.* NTNU